Aufgabe B2 Landesabitur Hessen 2008 LK

Gegeben: $P(0|3|-3)$ und $Q_k(3|-k|0)$

1.1.

$$g_k : \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -k-3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.2.

g_k und g_l bilden die Ebene $E_{k,l} = \overline{OP} + r\overline{PQ_k} + s\overline{PQ_l}$. Wir berechnen den Normalenvektor

über das Vektorprodukt $\overline{PQ_k} \times \overline{PQ_l} = \begin{pmatrix} 3 \\ -k-3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -l-3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3(k+3)+3(l+3) \\ 0 \\ -3(k+3)+3(l+3) \end{pmatrix}$

Somit ergibt die Normalengleichung der Ebene $E_{k,.l} : \bar{n} * \bar{x} = \bar{n} * \overline{OP} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} * \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = -3$ und damit die Koordinatengleichung $\underline{E_{k,j} : x + z = -3}$

2. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ_k}$ ist $M_k(1{,}5|1{,}5-0{,}5k|-1{,}5)$. Die zur Strecke $\overline{PQ_k}$ durch M_k

führende senkrechte Ebene hat den Normalenvektor $\bar{n} = \overline{PQ_k} = \begin{pmatrix} 3 \\ -k-3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Die

Normalengleichung der gesuchten Ebene ist dann $E_\perp : \bar{n} * \bar{x} = \bar{n} * \overline{OM_k}$, also

$E_\perp : \begin{pmatrix} 3 \\ -k-3 \\ 3 \end{pmatrix} * \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -k-3 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5-0{,}5k \\ -1{,}5 \end{pmatrix} = 0{,}5k^2 - 4{,}5$. Dann ist die Koordinatengleichung

$\underline{E_\perp : 3x - (k+3)y + 3z = 0{,}5k^2 - 4{,}5}$

K.3(Variante Kugel)

Gegeben: k=3 ➔ $E_\perp : x-2y+z=0$ und Q_3(3|-3|0)

- $K_1 = \{X = (x\,|\,y\,|\,z) \| XP| = r_1 = |PQ_3| = \sqrt{3^2+6^2+3^2} = 3\sqrt{6}\,\}$oder

  $K_1 : x^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 54$
- Der Radius r_2 der Kugel K_2 ist gleich dem Abstand d des Punktes P(0|3|-3) von der Tangentialebene $E_\perp : x-2y+z=0$. Dazu müssen wir die Gerade $g: \bar{x} = \overline{OP} + d\overline{n^0}$ in die Ebene einsetzen, weil $\overline{n^0}$ der normierte Normalenvektor der Ebene ist:

  $$g: \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{d}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ in } E_\perp : x-2y+z=0 \Rightarrow$$

  $$\frac{d}{\sqrt{6}} - 2\left(3 - \frac{2d}{\sqrt{6}}\right) + \left(-3 + \frac{d}{\sqrt{6}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{\sqrt{6}} - 6 + \frac{4d}{\sqrt{6}} - 3 + \frac{d}{\sqrt{6}} = 0 \Leftrightarrow \frac{6d}{\sqrt{6}} = 9 \Leftrightarrow \underline{d = \frac{9}{\sqrt{6}}}$$

  Somit ist $K_2 : x^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 13{,}5$
- Die Volumina zweier Kugel verhalten sich wie die Kuben der Radien, denn

  $$\frac{V_1}{V_2} = \frac{4/3\,\pi \cdot r_1^3}{4/3\,\pi \cdot r_2^3} = \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{\left(3\sqrt{6}\right)^3}{\left(\frac{9}{\sqrt{6}}\right)^3} = \left(\frac{3\sqrt{6}\sqrt{6}}{9}\right)^3 = \left(\frac{3 \cdot 6}{9}\right)^3 = 2^3 = 8$$
- Die Mittelpunkte aller Kugeln, die die beiden Kugel K_1 und K_2 mit gemeinsamem Mittelpunkt P berühren, liegen auf einer weiteren Kugel K_3 um P mit den Radius

  $$r_3 = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{2r_2 + r_2}{2} = \frac{3}{2} r_2 = \frac{3 \cdot 9}{2\sqrt{6}} \approx 5{,}51$$
- Der Radius des Schnittkreises berechnet sich durch $r^2 = r_1^2 - d^2 = 40{,}5 \Rightarrow r = \sqrt{40{,}5} \approx 6{,}36$

M.3 (Variante Matrix)

Gegeben: k=3 ➔ $E: x-2y+z=0$ und B(6|0|0)

- Dazu müssen wir die Gerade $g: \bar{x} = \overline{OB} + d\overline{n^0}$ in die Ebene einsetzen, weil $\overline{n^0}$ der normierte Normalenvektor der Ebene ist:

  $$g: \bar{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ in } E_\perp : x-2y+z=0 \Rightarrow$$

  $$\left(6 + \frac{d}{\sqrt{6}}\right) - 2\left(-\frac{2d}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{d}{\sqrt{6}}\right) = 0 \Leftrightarrow 6 + \frac{d}{\sqrt{6}} + \frac{4d}{\sqrt{6}} + \frac{d}{\sqrt{6}} = 0 \Leftrightarrow \frac{6d}{\sqrt{6}} = -6 \Leftrightarrow d = -\sqrt{6}$$

Dann ist $\overline{OB'} = \overline{OB} + 2d\overline{n^0} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ➔ $B' = (4|4|-2)$

- $\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ➔ *B'*=(4|4|-2)
- Jede Matrix *S*, für die *S**S*=*E* die Einheitsmatrix ist beschreibt eine Spiegelung, weil jeder Punkt nach einer Doppelspiegelung an einer Ebene, einer Geraden (Achse) oder einem Punkt wieder auf sich selbst abgebildet wird.